

REPRÉSENTATIONS SUPERSINGULIÈRES DE $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ET (φ, Γ) -MODULES

par

Laurent Berger

Résumé. — L'objet de cette note est de donner une démonstration directe du fait que si l'on applique le foncteur de Colmez à une $\overline{\mathbf{F}}_p$ -représentation irréductible de dimension deux de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors on trouve la restriction au sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ d'une représentation supersingulière.

Abstract (Supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ and (φ, Γ) -modules)

The purpose of this note is to give a direct proof of the fact that if one applies Colmez' functor to a two dimensional irreducible $\overline{\mathbf{F}}_p$ -representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, one gets the restriction to the Borel subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ of a supersingular representation.

Table des matières

Introduction et notations.....	1
1. Quelques (φ, Γ) -modules en caractéristique p	2
2. Représentations irréductibles de dimension 2.....	4
3. Construction de représentations du Borel.....	5
4. Démonstration de l'isomorphisme.....	7
Références.....	10

Introduction et notations

Cette note s'inscrit dans le cadre de la correspondance de Langlands p -adique et est un complément à [Ber05]. L'objet de ce dernier article est de démontrer la compatibilité à la réduction modulo p de la « correspondance de Langlands p -adique » définie par Breuil, en utilisant la réalisation découverte par Colmez de cette correspondance via les (φ, Γ) -modules. La démonstration donnée dans [Ber05] est directe pour les représentations galoisiennes qui sont somme de deux caractères (quand la représentation côté GL_2 est une somme directe de deux induites paraboliques), mais utilise un chemin assez détourné dans le cas d'une représentation galoisienne irréductible (quand la représentation côté GL_2 est une supersingulière). L'objet de cette note est de donner une démonstration

directe dans ce dernier cas. Remarquons qu'un sous-produit des calculs de [Ber05] est le fait que les restrictions au Borel des supersingulières restent irréductibles. Depuis, Paškūnas a donné dans [Pas06] une démonstration directe de ce fait et dans cette note, nous utilisons de manière essentielle le résultat de Paškūnas. Pour garder à l'introduction une longueur raisonnable, et comme cette note fait directement suite à [Ber05], nous renvoyons à ce dernier article pour les notations utilisées dans l'énoncé de notre résultat principal :

Théorème A. — *Si $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et si χ est un caractère de \mathbf{Q}_p^\times , alors on a un isomorphisme de représentations de $B_2(\mathbf{Q}_p) : (\varprojlim_\psi D^\sharp(\rho(r, \chi)))^* \simeq \pi(r, 0, \chi)$.*

Signalons que ce théorème suit aussi des constructions très générales de Colmez dans [Col07b] où il est redémontré mais que la démonstration de Colmez consiste à construire l'inverse du foncteur $W \mapsto \varprojlim_\psi D^\sharp(W)$ et à l'appliquer à $\pi(r, 0, \chi)$ ce qui est *a priori* assez différent de nos calculs.

Enfin, le lecteur que cela intéresse pourra appliquer les méthodes de cette note au cas des représentations galoisiennes de dimension 2 qui sont sommes de deux caractères et retrouver la correspondance avec les sommes de $\pi(r, \lambda, \chi)$, ce qui consiste à redémontrer la correspondance dans ce cas-là en ne passant plus par les induites paraboliques et donc en évitant l'utilisation de la projection stéréographique.

Rappelons à présent certaines des notations qui sont utilisées dans cette note. La lettre k désigne une extension finie de \mathbf{F}_p qui est le corps des coefficients de toutes les représentations que l'on considère. On note ω le caractère cyclotomique modulo p et μ_λ le caractère non-ramifié de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui envoie le frobenius arithmétique sur λ^{-1} . Si W est une représentation k -linéaire de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on note $D(W)$ le (φ, Γ) -module sur $k((X))$ associé à W par Fontaine dans [Fon90] et $D^\sharp(W)$ le $k[[X]]$ -réseau de $D(W)$ construit par Colmez dans [Col07a]. On note G pour $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et B pour $B_2(\mathbf{Q}_p)$ et K pour $GL_2(\mathbf{Z}_p)$ et Z pour le centre de G . On note ω et μ_λ les caractères de \mathbf{Q}_p^\times définis par $\omega(a) = ap^{-\text{val}(a)}$ et $\mu_\lambda(a) = \lambda^{\text{val}(a)}$.

1. Quelques (φ, Γ) -modules en caractéristique p

Si n est un entier ≥ 1 , alors on note ω_n le caractère fondamental de Serre de niveau n qui peut être défini de la manière suivante : on choisit $\pi_n \in \overline{\mathbf{Q}_p}$ tel que $\pi_n^{p^n-1} = -p$ et si $g \in \mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p}$, alors on pose $\omega_n(g) = g(\pi_n)/\pi_n \in \overline{\mathbf{F}_p}^\times$; cette définition ne dépend pas du choix de π_n et montre que ω_n s'étend à $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_{p^n}}$. Certains auteurs prennent plutôt pour π_n une racine de $\pi_n^{p^n-1} = p$; cela ne change pas $\omega_n|_{\mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p}}$ mais notre définition a l'avantage que pour $n = 1$, on a $\omega_1 = \omega$ sur $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ tout entier.

Afin de décrire les (φ, Γ) -modules associés aux représentations irréductibles en caractéristique p , nous devons donner une construction « en caractéristique p » de ω_n . Pour cela, nous utilisons le corps $\tilde{\mathbf{E}}$ (défini dans [Fon90]) qui intervient dans la construction des (φ, Γ) -modules. C'est un corps algébriquement clos muni d'une action de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et qui contient $\mathbf{F}_p((X))$; en particulier, il existe $Y \in \tilde{\mathbf{E}}$ tel que $Y^{(p^n-1)/(p-1)} = X$. On pose $f_g(X) = \omega(g)X/g(X)$ pour $g \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$; cette série ne dépend que de l'image de g dans Γ . Comme $f_g(X) \in 1 + X\mathbf{F}_p[[X]]$ l'expression $f_g^s(X)$ a bien un sens si $s \in \mathbf{Z}_p$.

Lemme 1.1. — Si $g \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_{p^n}}$ alors $g(Y) = Y\omega_n^p(g)f_g^{-\frac{p-1}{p^n-1}}(X)$.

Démonstration. — Rappelons que l'élément $X \in \tilde{\mathbf{E}}^+ = \varprojlim \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ vaut $1 - \varepsilon$ où $\varepsilon = (\zeta_{p^j})_{j \geq 0}$ et où $\{\zeta_{p^j}\}_{j \geq 0}$ est une suite compatible. Si $j \geq 1$, choisissons $\pi_{n,j} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ tel que :

$$\pi_{n,j}^{\frac{p^n-1}{p-1}} = \zeta_{p^j} - 1$$

Si $g \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_{p^n}}$, alors $g(\zeta_{p^j} - 1) = \omega(g)(\zeta_{p^j} - 1)f_g^{-1}(\zeta_{p^j} - 1)$ et donc il existe $\omega_{n,j}(g) \in \mathbf{F}_{p^n}^\times$ tel que :

$$\frac{g(\pi_{n,j})}{\pi_{n,j}} = [\omega_{n,j}(g)]f_g^{-\frac{p-1}{p^n-1}}(\zeta_{p^j} - 1),$$

où $[\cdot]$ dénote le relèvement de Teichmüller. L'application qui à g associe $\omega_{n,j}(g)$ est un caractère de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_{p^n}}$ qui ne dépend pas du choix de $\pi_{n,j}$. De plus on a :

$$\begin{cases} (\zeta_{p^{j+1}} - 1)^p = (\zeta_{p^j} - 1) \cdot (1 + O(p)) & \text{si } j \geq 1 \\ (\zeta_p - 1)^{p-1} = -p \cdot (1 + O(\zeta_p - 1)) \end{cases}$$

ce qui fait que $\omega_{n,j+1}^p = \omega_{n,j}$ si $j \geq 1$ et $\omega_{n,1} = \omega_n$. On en déduit aussi que l'on peut choisir les $\pi_{n,j}$ de telle manière que $\pi_{n,j+1}^p/\pi_{n,j} \in 1 + \mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p}$. Si l'on écrit $Y = (y^{(i)}) \in \varprojlim \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$, alors on a $y^{(i)} = \lim_{j \rightarrow +\infty} \pi_{n,i+j}^{p^j}$ puisque les $\pi_{n,j}$ sont compatibles en ce sens que $\pi_{n,j+1}^p/\pi_{n,j} \in 1 + \mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p}$ ce qui fait que si $g \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_{p^n}}$, alors :

$$\frac{g(y^{(i)})}{y^{(i)}} = [\omega_{n,i}(g)] \cdot \lim_{j \rightarrow +\infty} (f_g^{-\frac{p-1}{p^n-1}}(\zeta_{p^{i+j}} - 1))^{p^j}$$

et donc que l'on a bien $g(Y) = Y\omega_n^p(g)f_g^{-\frac{p-1}{p^n-1}}(X)$ dans $\tilde{\mathbf{E}}$. \square

On se donne à présent $1 \leq h \leq p^n - 2$ et on suppose qu'il n'existe pas d'entier r divisant n tel que h est un multiple de $(p^n - 1)/(p^r - 1)$. Cela revient à dire que si l'on écrit $h = h_0 h_1 \dots h_{n-1}$ en base p , alors l'application $i \mapsto h_i$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\{0, \dots, p-1\}$ n'admet pas de période plus petite que n . Dans ce cas, les caractères $\omega_n^h, \omega_n^{ph}, \dots, \omega_n^{p^{n-1}h}$ de $\mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p}$ sont deux-à-deux distincts et il existe une unique représentation irréductible de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ que l'on note $\mathrm{ind}(\omega_n^h)$, dont le déterminant est ω^h et dont la restriction à $\mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p}$ est $\omega_n^h \oplus \omega_n^{ph} \oplus \dots \oplus \omega_n^{p^{n-1}h}$. Toute représentation irréductible de dimension n de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $\mathrm{ind}(\omega_n^h) \otimes \chi$ pour un entier $1 \leq h \leq p^n - 2$ et un caractère $\chi : \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p} \rightarrow k^\times$.

Proposition 1.2. — *Le (φ, Γ) -module $D(\text{ind}(\omega_n^h))$ est défini sur $\mathbf{F}_p((X))$ et admet une base e_0, \dots, e_{n-1} dans laquelle $\gamma(e_j) = f_\gamma(X)^{hp^j(p-1)/(p^n-1)}e_j$ si $\gamma \in \Gamma$ et $\varphi(e_j) = e_{j+1}$ pour $0 \leq j \leq n-2$ et $\varphi(e_{n-1}) = (-1)^{n-1}X^{-h(p-1)}e_0$.*

Démonstration. — Soit W la représentation associée au (φ, Γ) -module décrit dans la proposition. Si l'on pose $f = X^h e_0 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$, alors on a $\varphi(f) = f$ et $\gamma(f) = \omega(\gamma)^h f$ ce qui fait que le déterminant de W est bien ω^h et il suffit donc de montrer que la restriction de $\mathbf{F}_{p^n} \otimes_{\mathbf{F}_p} W$ à $\mathcal{I}_{\mathbf{Q}_p}$ se décompose en $\omega_n^h \oplus \omega_n^{ph} \oplus \dots \oplus \omega_n^{p^{n-1}h}$.

Si l'on décompose $\mathbf{F}_{p^n} \otimes_{\mathbf{F}_p} \tilde{\mathbf{E}}$ en $\prod_{k=0}^{n-1} \tilde{\mathbf{E}}$ via l'application $x \otimes y \mapsto (\sigma^k(x)y)$ où σ est le frobenius de \mathbf{F}_{p^n} , alors pour $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \prod_{k=0}^{n-1} \tilde{\mathbf{E}}$, on a les formules :

$$\begin{aligned}\varphi((x_0, \dots, x_{n-1})) &= (\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_0), \dots, \varphi(x_{n-2})) \\ g((x_0, \dots, x_{n-1})) &= (g(x_0), \dots, g(x_{n-1})),\end{aligned}$$

si $g \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_{p^n}}$ (mais pas si $g \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$). On choisit $\alpha \in \tilde{\mathbf{E}}$ tel que $\alpha^{p^{n-1}} = (-1)^{n-1}$ et on pose :

$$\begin{aligned}v_0 &= (\alpha Y^h, 0, \dots, 0) \cdot e_0 + (0, \alpha^p Y^{ph}, \dots, 0) \cdot e_1 + \dots (0, \dots, 0, \alpha^{p^{n-1}} Y^{p^{n-1}h}) \cdot e_{n-1} \\ v_1 &= (0, \alpha Y^h, \dots, 0) \cdot e_0 + (0, 0, \alpha^p Y^{ph}, \dots, 0) \cdot e_1 + \dots (\alpha^{p^{n-1}} Y^{p^{n-1}h}, 0, \dots, 0) \cdot e_{n-1} \\ &\vdots \\ v_{n-1} &= (0, \dots, 0, \alpha Y^h) \cdot e_0 + (\alpha^p Y^{ph}, 0, \dots, 0) \cdot e_1 + \dots (0, \dots, 0, \alpha^{p^{n-1}} Y^{p^{n-1}h}, 0) \cdot e_{n-1}\end{aligned}$$

On vérifie que les vecteurs v_0, \dots, v_{n-1} forment une base de $\mathbf{F}_{p^n} \otimes_{\mathbf{F}_p} (\tilde{\mathbf{E}} \otimes_{\mathbf{F}_p((X))} D(W))$. Les formules qui donnent l'action de φ impliquent que $\varphi(v_j) = v_j$ ce qui fait que $v_j \in \mathbf{F}_{p^n} \otimes_{\mathbf{F}_p} W$. Enfin, les formules qui donnent l'action de Γ et le lemme 1.1 impliquent que $g(v_j) = \omega_n^{hp^{1-j}} v_j$ ce qui achève la démonstration. \square

2. Représentations irréductibles de dimension 2

On fixe à présent $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et $\chi = \omega^s \mu_\lambda$ un caractère de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et on pose $W = \rho(r, \chi) = (\text{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi$. On sait que toute k -représentation de dimension 2 de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à une telle représentation. Comme corollaire immédiat de la proposition 1.2, on trouve le résultat suivant.

Proposition 2.1. — *Le (φ, Γ) -module $D(W)$ admet une base e, f dans laquelle :*

$$\text{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -X^{-(r+1)(p-1)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda \quad \text{et} \quad \text{Mat}(\gamma) = \begin{pmatrix} f_\gamma(X)^{\frac{r+1}{p+1}} & 0 \\ 0 & f_\gamma(X)^{\frac{p(r+1)}{p+1}} \end{pmatrix} \cdot \omega(\gamma)^s.$$

Corollaire 2.2. — *L'action de l'opérateur ψ sur $D(W)$ est donnée par :*

$$\psi(\alpha e + \beta f) = \psi(\beta) \lambda^{-1} e - \psi(X^{(r+1)(p-1)} \alpha) \lambda^{-1} f.$$

Démonstration. — On a $\psi(\alpha e + \beta f) = \psi(-\alpha X^{(r+1)(p-1)} \lambda^{-1} \varphi(f) + \beta \lambda^{-1} \varphi(e))$ et le corollaire suit alors du fait que $\psi(a\varphi(b)) = \psi(a)b$. \square

Proposition 2.3. — *Le treillis de Colmez $D^\sharp(W)$ est donné par :*

$$D^\sharp(W) = k[[X]] \cdot e \oplus X^r k[[X]] \cdot f.$$

Démonstration. — La définition de D^\sharp est donnée dans le §2.4 de [Col07a], c'est le plus grand $k[[X]]$ -réseau de D qui est stable par ψ et sur lequel ψ est surjectif. Par ailleurs, le lemme 1.1.2 de [Ber05] montre que dans notre cas, $D^\sharp(W)$ est le seul $k[[X]]$ -réseau de D qui est stable par ψ et sur lequel ψ est surjectif et il suffit donc de vérifier que $M = k[[X]]e \oplus X^r k[[X]]f$ a ces deux propriétés. Le corollaire 2.2 nous donne la formule :

$$\psi(\alpha e + \beta X^r f) = \psi(\beta X^r) \lambda^{-1} e - \psi(\alpha X^{p-1-r}) \lambda^{-1} X^r f$$

ce qui fait que M est stable par ψ . Si $0 \leq t \leq p-1$, alors $\psi(X^t) = (-1)^t$ et l'application $f(X) \mapsto \psi(X^t f(X))$ de $k[[X]] \rightarrow k[[X]]$ est donc surjective. Comme r et $p-1-r$ sont compris entre 0 et $p-1$, l'application ψ est bien surjective sur M et donc $D^\sharp(W) = k[[X]]e \oplus X^r k[[X]]f$. \square

3. Construction de représentations du Borel

On conserve $W = \rho(r, \chi) = (\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi$ et on pose comme dans [Ber05] :

$$\varprojlim_{\psi} D^\sharp(W) = \{y = (y_0, y_1, \dots) \text{ avec } y_i \in D^\sharp(W) \text{ tels que } \psi(y_{i+1}) = y_i \text{ pour tout } i \geq 0\},$$

que l'on munit de l'action de B donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \star v \right)_i &= (\omega^r \chi^2)^{-1}(x) v_i; \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \star v \right)_i &= v_{i-j} = \psi^j(v_i); \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \star v \right)_i &= \gamma_a^{-1}(v_i), \text{ où } \gamma_a \in \Gamma \text{ est tel que } \chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma_a) = a; \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \star v \right)_i &= \psi^j((1+X)^{p^{i+j}z} v_{i+j}), \text{ pour } i+j \geq -\mathrm{val}(z). \end{aligned}$$

On pose ensuite $\Omega(W) = (\varprojlim_{\psi} D^\sharp(W))^*$ ce qui fait de $\Omega(W)$ une représentation lisse de B dont le caractère central est $\omega^r \chi^2$. Rappelons que par la proposition 1.2.2 de [Ber05], la représentation $\Omega(W)$ est irréductible. Si $y = (y_0, y_1, \dots)$, alors par la proposition 2.3 on peut écrire $y_i = \alpha_i e + \beta_i X^r f$ et on appelle $\theta \in \Omega(W)$ la forme linéaire qui à y associe $\theta(y) = \alpha_0(0)$.

Lemme 3.1. — *Si $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B \cap \mathrm{KZ}$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \star \theta = \chi(ad) \omega^r(a) \theta$.*

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \star \theta \right) (y) &= \theta \left(\begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1}d^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \star y \right) \\
&= \theta \left(\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -bd^{-1} \\ 0 & ad^{-1} \end{pmatrix} \star y \right) \\
&= \theta((\omega^r \chi^2)^{-1}(a^{-1})\gamma_{ad^{-1}}^{-1}((1+X)^{-bd^{-1}}y)) \\
&= (\omega^r \chi^2)(a)\omega^s(a^{-1}d)\theta(y) \\
&= \omega^r(a)\chi(ad)\theta(y),
\end{aligned}$$

puisque $\mu_\lambda(a) = \mu_\lambda(d)$ comme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B \cap \text{KZ}$ ce qui fait que $\chi(a) = \chi(d)\omega^s(ad^{-1})$. \square

Si V est une représentation de $B \cap \text{KZ}$, on note $\text{ind}_{B \cap \text{KZ}}^B V$ l'induite à support comapct et on note $[b, v]$ (comme dans [BL94] et [Bre03a]) l'élément de $\text{ind}_{B \cap \text{KZ}}^B V$ défini par $[b, v](g) = gb \cdot v$ si $gb \in B \cap \text{KZ}$ et $[b, v](g) = 0$ sinon. On déduit du lemme ci-dessus un morphisme $B \cap \text{KZ}$ -équivariant de la représentation $(\omega^r \otimes 1) \otimes (\chi \circ \det)$ vers $\Omega(W)$ et par réciprocity de Frobenius, on en déduit l'existence d'un morphisme :

$$\pi_W : \text{ind}_{B \cap \text{KZ}}^B (\omega^r \otimes 1) \otimes (\chi \circ \det) \rightarrow \Omega(W),$$

déterminé par $\pi_W([1, v_r]) = \theta$ où v_r est une base de $(\omega^r \otimes 1) \otimes (\chi \circ \det)$.

Proposition 3.2. — Soit $J = \{j_0, \dots, j_{p-1}\}$ un ensemble d'éléments de \mathbf{Z}_p tels que $j_i = i \pmod p$ pour tout i .

- (1) Si $r = 0$, alors $\pi_W\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} [1, v_0] + \sum_{j \in J} \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, v_0]\right) = 0$;
- (2) si $r \geq 1$, alors $\pi_W\left(\sum_{j \in J} (-j)^k \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, v_r]\right) = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$;
- (3) si $r \geq 1$ et si $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ sont tels que $\sum_{i=0}^{p-1} i^\ell \lambda_i = 0$ pour tout $0 \leq \ell \leq r-1$, alors $\pi_W\left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i i^r [1, v_r] + \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \sum_{j \in J} (-j)^r \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, v_r]\right) = 0$.

Démonstration. — Pour montrer le (1), il faut vérifier que :

$$\theta \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \star y + \sum_{j \in J} \begin{pmatrix} p^{-1} & -jp^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \star y \right) = 0$$

quel que soit $y \in \varprojlim_\psi D^\sharp(W)$. En utilisant le fait que :

$$\begin{pmatrix} p^{-1} & -jp^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et les formules donnant l'action de B sur $y \in \varprojlim_\psi D^\sharp(W)$, on se ramène à montrer que :

$$\theta \left(\psi^{-1}(y) + \lambda^2 \sum_{j \in J} \psi((1+X)^{-j}y) \right) = 0.$$

Le fait que $\theta((1+X)^k z) = \theta(z)$ si $k \in \mathbf{Z}_p$ et $z \in \varprojlim_\psi D^\sharp(W)$ montre que la valeur de $\theta(\psi^{-1}(y) + \lambda^2 \sum_{j \in J} \psi((1+X)^{-j}y))$ est inchangée si l'on remplace J par un autre système

de représentants de \mathbf{F}_p dans \mathbf{Z}_p et on choisit $J = \{0, -1, \dots, -(p-1)\}$. Comme on a alors $\sum_{j \in J} (1+X)^{-j} = X^{p-1}$, on s'est ramené à montrer que $\theta(\psi^{-1}(y) + \lambda^2 \psi(X^{p-1}y)) = 0$. En écrivant $y_1 = \alpha_1 e + X^r \beta_1 f$ et en posant $y = \psi(\psi^{-1}(y))$, on trouve que $\theta(\psi^{-1}(y) + \lambda^2 \psi(X^{p-1}y)) = \alpha_1(0) - \psi(X^{p-1} \psi(X^{p-1} \alpha_1))(0)$ et c'est un petit exercice de vérifier que $\psi(X^{p-1} \psi(X^{p-1} \alpha_1))(0) = \alpha_1(0)$.

Pour montrer le (2), il faut vérifier que :

$$\theta \left(\sum_{j \in J} (-j)^k \begin{pmatrix} p^{-1} & -jp^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \star y \right) = 0$$

pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$, et comme pour le cas $r = 0$, on se ramène à montrer que $\theta(\psi(\sum_{j \in J} (-j)^k (1+X)^{-j} y)) = 0$. Comme ci-dessus, la valeur de cette expression ne dépend du choix de J et on prend $J = \{0, -1, \dots, -(p-1)\}$. En écrivant $y_0 = \alpha_0 e + X^r \beta_0 f$, on se ramène à montrer que la série $\psi(X^r \beta_0 \sum_{j=0}^{p-1} j^k (1+X)^j)$ est nulle en 0. Le coefficient de X^t dans $\sum_{j=0}^{p-1} j^k (1+X)^j$ est $\sum_{j=0}^{p-1} j^k \binom{j}{t}$ et cette somme est nulle (dans \mathbf{F}_p) tant que $k+t \leq p-1$ (encore un exercice) ce qui fait que $X^r \beta_0 \sum_{j=0}^{p-1} j^k (1+X)^j$ est divisible par X^p si $k \leq r-1$.

Pour montrer le (3), il faut vérifier que :

$$\theta \left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i i^r y + \sum_{j \in J} \sum_{i=0}^{p-1} (-j)^r \lambda_i \begin{pmatrix} p^{-1} & -jp^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \star y \right) = 0,$$

et comme ci-dessus, on se ramène à montrer que $\theta(z) = 0$ où :

$$z = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i i^r y + \lambda^2 \psi \left(\sum_{j \in J} (-j)^r (1+X)^{-j} \psi \left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i (1+X)^{-i} y \right) \right).$$

Le premier terme non nul de la série $\sum_{j \in J} (-j)^r (1+X)^{-j}$ est $-X^{p-1-r}/(p-1-r)!$ et le fait que l'on a $\sum_{i=0}^{p-1} i^\ell \lambda_i = 0$ pour tout $0 \leq \ell \leq r-1$ implique que tous les termes de la série $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i (1+X)^{-i}$ sont nuls jusqu'à X^r dont le coefficient vaut $(-1)^r (\sum_{i=0}^{p-1} i^r \lambda_i)/r!$. Le théorème de Wilson implique que $r! \cdot (p-1-r)! = (-1)^{r+1}$ dans \mathbf{F}_p et un calcul semblable à celui du (1) montre que si l'on écrit $y = \alpha e + \beta X^r f$, alors le coefficient de e dans z est $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i i^r (\alpha - \psi((X^{p-1} + O(X^p)) \psi((X^{p-1} + O(X^p)) \alpha)))$ qui est bien nul en $X = 0$. \square

4. Démonstration de l'isomorphisme

Ce § est consacré à la démonstration du théorème A de l'introduction. Rappelons que $\text{Sym}^r k^2$ est l'ensemble des polynômes homogènes en x et y de degré r à coefficients dans k muni de l'action de K donnée par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P(x, y) = P(ax + cy, bx + dy)$ et qu'on étend l'action de K à KZ en décidant que $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} P(x, y) = P(x, y)$. Afin de montrer le théorème

A de l'introduction, il reste à faire le lien entre les représentations $\text{ind}_{B \cap KZ}^B(\omega^r \otimes 1)$ et $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^r k^2$. Rappelons à cet effet que l'on dispose de la décomposition d'Iwasawa $G = BK$ qui a pour conséquence que si V est une représentation de KZ , alors l'application « restriction à B » de $\text{ind}_{KZ}^G V$ vers $\text{ind}_{B \cap KZ}^B V$ est un isomorphisme.

Par ailleurs, la représentation $\omega^r \otimes 1$ est une sous- B -représentation de $\text{Sym}^r k^2$ (elle se réalise sur l'espace engendré par x^r) et on en déduit une application $\text{ind}_{B \cap KZ}^B \omega^r \otimes 1 \rightarrow \text{ind}_{B \cap KZ}^B \text{Sym}^r k^2$. Rappelons que T désigne l'opérateur de Hecke défini dans [BL95] et [BL94].

Proposition 4.1. — *La représentation $(\text{ind}_{B \cap KZ}^B 1)/T$ est irréductible et si $r \geq 1$, alors l'application :*

$$\frac{\text{ind}_{B \cap KZ}^B(\omega^r \otimes 1)}{T(\text{ind}_{B \cap KZ}^B \text{Sym}^r k^2) \cap \text{ind}_{B \cap KZ}^B(\omega^r \otimes 1)} \rightarrow \frac{\text{ind}_{B \cap KZ}^B \text{Sym}^r k^2}{T(\text{ind}_{B \cap KZ}^B \text{Sym}^r k^2)}$$

est un isomorphisme et les deux représentations sont irréductibles.

Démonstration. — Le fait que $(\text{ind}_{B \cap KZ}^B 1)/T$ et $(\text{ind}_{B \cap KZ}^B \text{Sym}^r k^2)/T$ sont irréductibles fait l'objet du (i) du théorème 1.1 de [Pas06] étant donné l'isomorphisme entre $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^r k^2$ et $\text{ind}_{B \cap KZ}^B \text{Sym}^r k^2$ rappelé ci-dessus. Quand $r \geq 1$, l'application donnée est injective par construction et son image est une sous-représentation non-triviale de $(\text{ind}_{B \cap KZ}^B \text{Sym}^r k^2)/T$. Cette représentation étant irréductible, l'application ci-dessus est bien un isomorphisme. \square

Rappelons que des formules donnant l'action de T sur $\text{ind}_{B \cap KZ}^B \text{Sym}^r k^2$ se trouvent dans le §2.2 de [Bre03b]. On a notamment :

$$(1) \quad T([1, x^{r-i} y^i]) = \begin{cases} \sum_{j \in J} \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, (-j)^i x^r] & \text{si } i \leq r-1; \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} [1, y^r] + \sum_{j \in J} \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, (-j)^r x^r] & \text{si } i = r; \end{cases}$$

Lemme 4.2. — *Si $r \geq 1$, alors $T(\text{ind}_{B \cap KZ}^B \text{Sym}^r k^2) \cap \text{ind}_{B \cap KZ}^B(\omega^r \otimes 1)$ est engendré par les translatés sous l'action de B des vecteurs :*

$$\begin{cases} T([1, x^{r-i} y^i]) & \text{pour } 0 \leq i \leq r-1, \\ T(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & p^{-1}i \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}, y^r) & \text{où } \sum_{i=0}^{p-1} i^\ell \lambda_i = 0 \text{ pour tout } 0 \leq \ell \leq r-1. \end{cases}$$

Démonstration. — La formule (1) ci-dessus implique que $T([1, x^{r-i} y^i]) \in \text{ind}_{B \cap KZ}^B(\omega^r \otimes 1)$ et donc de même pour les translatés de ces vecteurs. Il reste donc à déterminer quand est-ce qu'un vecteur du type $T(\sum_j [b_j, \lambda_j y^r])$ appartient à $\text{ind}_{B \cap KZ}^B(\omega^r \otimes 1)$. Pour cela, soit $A = \{\alpha_n p^{-n} + \dots + \alpha_1 p^{-1} \text{ où } 0 \leq \alpha_j \leq p-1\}$ ce qui fait que A est un système de

représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ et que l'on a :

$$B = \prod_{\substack{\beta \in A \\ \delta \in \mathbf{Z}}} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & p^\delta \end{pmatrix} B \cap KZ,$$

comme le montre un petit calcul. On pose $b_{\beta, \delta} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & p^\delta \end{pmatrix}$ et on se donne un vecteur v de la forme $\sum_{\beta, \delta} \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_{\beta, \delta, i} [b_{\beta, \delta} p^{-1} i, y^r]$ (remarquons que $A = \coprod_{i=0}^{p-1} p^{-1} A + p^{-1} i$). On a alors :

$$T(v) = \sum_{\beta, \delta} b_{\beta, \delta+1} \cdot T \left(\lambda_{\beta, \delta, 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdot p^{-1} \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}, y^r \right) + \cdots + \lambda_{\beta, \delta, p-1} \begin{pmatrix} 1 & (p-1) \cdot p^{-1} \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}, y^r \right),$$

ce qui fait que l'ensemble des vecteurs v tels que $T(v) \in \mathrm{ind}_{B \cap KZ}^B(\omega^r \otimes 1)$ est engendré par les translatés sous l'action de B des $v_\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & p^{-1} i \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}, y^r]$ tels que $T(v_\lambda) \in \mathrm{ind}_{B \cap KZ}^B(\omega^r \otimes 1)$. La formule (1) montre que c'est le cas si et seulement si $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y^r] \in \mathrm{ind}_{B \cap KZ}^B(\omega^r \otimes 1)$ et donc si et seulement si $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i (ix + y)^r \in k \cdot x^r$ ce qui est équivalent aux conditions $\sum_{i=0}^{p-1} i^\ell \lambda_i = 0$ pour tout $0 \leq \ell \leq r-1$. \square

Proposition 4.3. — Soit $J = \{j_0, \dots, j_{p-1}\}$ un ensemble d'éléments de \mathbf{Z}_p tels que $j_i = i \pmod p$ pour tout i . Si $r = 0$, alors $T(\mathrm{ind}_{B \cap KZ}^B 1)$ est engendré par les translatés de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} [1, 1] + \sum_{j \in J} \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, 1]$$

et si $r \geq 1$, alors $T(\mathrm{ind}_{B \cap KZ}^B \mathrm{Sym}^r k^2) \cap \mathrm{ind}_{B \cap KZ}^B(\omega^r \otimes 1)$ est engendré par les translatés sous l'action de B des :

$$\sum_{j \in J} (-j)^i \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, x^r],$$

pour $0 \leq i \leq r-1$ et des :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i i^r [1, x^r] + \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & p^{-1} i \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \sum_{j \in J} (-j)^r \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, x^r],$$

où $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ sont tels que $\sum_{i=0}^{p-1} i^\ell \lambda_i = 0$ pour tout $0 \leq \ell \leq r-1$.

Démonstration. — Comme $\mathrm{ind}_{B \cap KZ}^B 1$ est engendrée par les translatés de $[1, 1]$ sous l'action de B , le sous-espace $T(\mathrm{ind}_{B \cap KZ}^B 1)$ est engendré par les translatés de $T([1, 1]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} [1, 1] + \sum_{j \in J} \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, 1]$ ce qui montre le premier point.

Si $r \geq 1$, alors la formule (1) nous dit que $T([1, x^{r-i} y^i]) = \sum_{j \in J} \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, (-j)^i x^r]$ pour $i \leq r-1$ et que :

$$T \left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & p^{-1} i \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}, y^r \right) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y^r] + \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & p^{-1} i \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \sum_{j \in J} (-j)^r \begin{pmatrix} p & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, x^r].$$

La condition $\sum_{i=0}^{p-1} i^\ell \lambda_i = 0$ pour tout $0 \leq \ell \leq r-1$ implique que $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \left[\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y^r \right] = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i i^r [1, x^r]$ et le lemme 4.2 permet alors de conclure. \square

Démonstration du théorème A. — Rappelons que l'on a construit au §2 une application $\pi_W : \text{ind}_{\text{B}\cap\text{KZ}}^{\text{B}}(\omega^r \otimes 1) \otimes (\chi \circ \det) \rightarrow \Omega(W)$, déterminée par $\pi_W([1, x^r]) = \theta$ (où l'on identifie $(\omega^r \otimes 1) \otimes (\chi \circ \det)$ à la sous-représentation de $\text{Sym}^r k^2 \otimes (\chi \circ \det)$ engendrée par x^r). Etant donné que la représentation $\Omega(W)$ est irréductible, et en vertu des isomorphismes entre représentations irréductibles fournis par la proposition 4.1, il ne reste plus qu'à montrer que l'image par π_W de $T(\text{ind}_{\text{B}\cap\text{KZ}}^{\text{B}} 1) \otimes (\chi \circ \det)$ (si $r = 0$) ou de $T(\text{ind}_{\text{B}\cap\text{KZ}}^{\text{B}} \text{Sym}^r k^2) \otimes (\chi \circ \det) \cap \text{ind}_{\text{B}\cap\text{KZ}}^{\text{B}}(\omega^r \otimes 1) \otimes (\chi \circ \det)$ (si $r \geq 1$) est nulle, ce qui suit directement de la proposition 4.3 et de la proposition 3.2. \square

Remerciements : je remercie Christophe Breuil de m'avoir demandé (en 2005!) une démonstration directe de l'isomorphisme du théorème A ainsi que pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur « Langlands p -adique ».

Références

- [BL95] L. BARTHEL, R. LIVNÉ – *Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case*, J. Number Theory 55 (1995), no. 1, 1–27.
- [BL94] L. BARTHEL, R. LIVNÉ – *Irreducible modular representations of GL_2 of a local field*, Duke Math. J. 75 (1994), no. 2, 261–292.
- [Ber05] L. BERGER – *Représentations modulaires de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2*, Astérisque, à paraître.
- [Bre03a] C. BREUIL – *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ I*, Compositio Math. 138 (2003), no. 2, 165–188.
- [Bre03b] C. BREUIL – *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ II*, J. Institut Math. Jussieu 2, 2003, 23–58.
- [Col07a] P. COLMEZ – *(φ, Γ) -modules et représentations du mirabolique de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$* , Astérisque, à paraître.
- [Col07b] P. COLMEZ – *Représentations de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules (version provisoire et partielle)*, Prépublication, 2007.
- [Fon90] J.-M. FONTAINE – *Représentations p -adiques des corps locaux I*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.
- [Pas06] V. PAŠKŪNAS – *On restriction of representations of $\text{GL}_2(F)$ to a Borel subgroup*, Compos. Math. 143 (2007), no. 6, 1533–1544.
- [Vig06] M.-F. VIGNÉRAS – *Série principale modulo p de groupes réductifs p -adiques*, Geom. Funct. Anal. 17 (2008), no. 6, 2090–2112.

Septembre 2008

LAURENT BERGER, Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France
E-mail : laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr • *Url* : www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger/